2.3 ARQUITECTURA DE UN ROBOT F180

En esta sección se elabora un análisis de los sistemas que componen a un robot F180. El análisis parte de la funcionalidad básica requerida y sirve como punto de partida para el diseño y la implementación de un equipo de robots F180.

2.3.1 Locomoción

Un robot móvil requiere mecanismos de locomoción que le permitan desplazarse en su ambiente. Existe una gran variedad de soluciones para lograr que un robot tenga movimiento y muchos de estos mecanismos de locomoción están inspirados en sus contrapartes biológicas [SIE 2004].

Una gran excepción la constituye la rueda, una invención de la humanidad que brinda una excelente movilidad en ambientes planos. La rueda ha sido el mecanismo de locomoción más usado en los robots móviles, su uso ofrece una buena estabilidad y balance pero requiere que se tome en cuenta la tracción, la maniobrabilidad y el control del movimiento [SIE 2004].

El tipo de desplazamiento que se debe considerar para un robot móvil está sumamente relacionado con el tipo y la geometría de las ruedas.

Existen muchos tipos de desplazamiento pero debido a sus características muy similares pueden ser clasificados en dos grandes clases: diferencial, y omnidireccional.

2.3.1.1 El desplazamiento diferencial

Un desplazamiento diferencial considera un arreglo par de ruedas. El principio de funcionamiento es simple: Para que el robot se desplace hacia delante conservando su orientación las ruedas deben girar a la misma velocidad y en la misma dirección. Para que el robot cambie su orientación debe existir una diferencia de velocidades en las ruedas, mientras más grande sea la diferencia de velocidades en las ruedas más grande será el cambio en la orientación del robot. En la Figura 2.5 se pretende mostrar que el robot cambiará de orientación como consecuencia de que las ruedas están girando a la misma velocidad pero en sentido contrario, en este caso el robot únicamente rota y no se traslada.

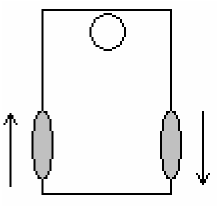

Figura 2.4a – Orientación inicial.

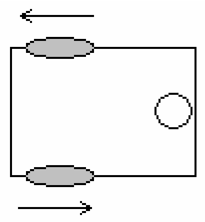

Figura 2.4b – El robot ha rotado.

2.3.1.2 El desplazamiento omnidireccional

El desplazamiento omnidireccional es de gran interés porque brinda una completa maniobrabilidad. Los robots omnidireccionales pueden moverse en cualquier dirección y en cualquier momento sin requerir una orientación específica para el desplazamiento del robot. Este tipo de desplazamiento requiere de ruedas que se puedan mover en más de una dirección, la figura 2.5 muestra el diseño de una rueda omnidireccional.

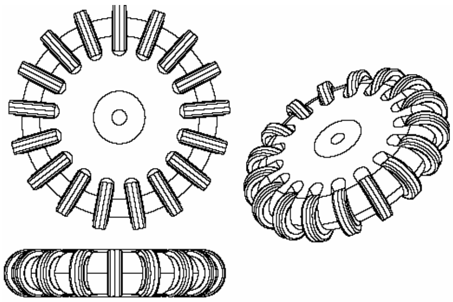

Figura 2.5 – Diseño de una rueda omnidireccional.

El movimiento omnidireccional ha adquirido popularidad en los robots móviles porque permite que el robot se desplace en línea recta desde un punto origen hacia cualquier otro punto, sin tener que rotar antes de desplazarse. Adicionalmente, la traslación sobre la ruta deseada se puede combinar con una rotación, de modo que el robot llega a su destino en el ángulo correcto.

Se requieren más de dos ruedas omnidireccionales para mover a un robot. Cada rueda proporciona una fuerza en una dirección normal[3] al eje del motor y paralela al piso. La suma de fuerzas provén la traslación y rotación del robot. La figura 2.6 muestra la base de los motores con sus ruedas del prototipo de un robot omnidireccional F180.

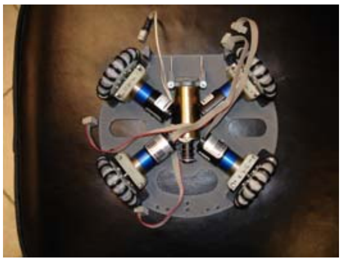

Figura 2.6 – Base de motores con ruedas para un robot omidireccional.

2.3.1.3 Control omnidireccional

Existe una relación inversa entre la maniobrabilidad y el control. Por ejemplo, los diseños omnidireccionales requieren un procesamiento adicional para convertir las velocidades de rotación y traslación del robot en velocidades individuales para cada rueda. Controlar un robot omnidireccional para que se mueva en una dirección deseada es más complicado que los métodos diferenciales. Para ello es necesario establecer un modelo cinemático omnidireccional.

2.3.1.4 Modelo cinemático omnidireccional

El proceso para entender el movimiento de un robot comienza con el proceso de describir la contribución de cada rueda y para ello es necesario establecer un marco de referencia y tomar en cuenta algunas importantes consideraciones[4]. En este caso, el marco de referencia es el plano cartesiano. La figura 2.7 es una representación de un robot omnidireccional en el plano cartesiano.

[3] A 90 grados

[4] Esas consideraciones se detallan en el anexo A “La convención de Osaka”

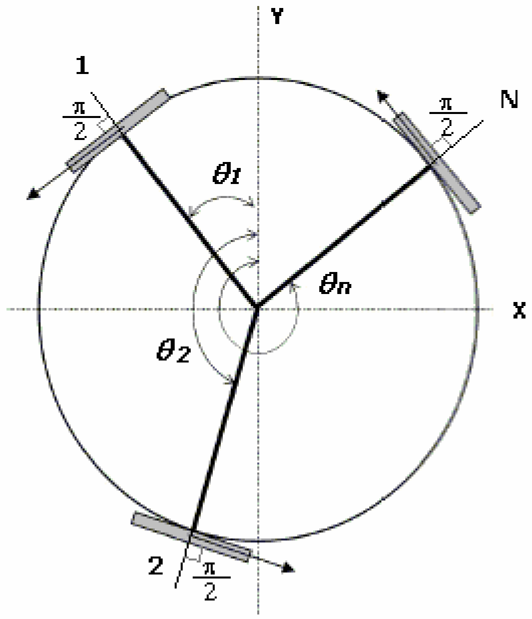

Figura 2.7 – El robot omnidireccional en el plano cartesiano.

Con este marco de referencia se puede determinar la posición del robot si se conocen las coordenadas (*x.y*) del centro del robot. El robot de la figura 2.8 es omnidireccional, tiene tres ruedas y su centro se localiza en el origen.

Para poder descomponer la contribución de cada motor en términos de X y Y es necesario utilizar la segunda Ley de Newton:

$$F = ma\,,$$

$$m\vec{a} = \sum_{i}^{N} f_i \;. \qquad \textbf{2.1}$$

Por medio de la ecuación 2.1 se puede determinar la relación directa que existe entre la aceleración de un cuerpo, su masa y la suma de fuerzas que interactúan sobre él [ALV 1983].

Para el caso general de un robot omnidireccional de masa m y con N motores ($N \geq 3$), despejando la aceleración de 2.1:

$$a = \frac{1}{m}\sum_{1}^{N} f_i \ . \qquad \textbf{2.2}$$

Para calcular las componentes de aceleración en los ejes X y Y se debe tomar en cuenta el ángulo (θ_i) sobre el que se coloca el motor con respecto a los ejes y que la dirección positiva de la fuerza del motor (de acuerdo con la convención de Osaka) apunta a $\theta_i + \frac{\pi}{2}$.

Entonces, la proyección de los componentes de aceleración en los ejes X y Y se obtiene con las siguientes ecuaciones:

$$a_x = \frac{1}{m}\sum_{1}^{N} -f_i sen(\theta_i + \frac{\pi}{2}), \qquad \textbf{2.3}$$

$$a_y = \frac{1}{m}\sum_{1}^{N} f_i \cos(\theta_i + \frac{\pi}{2}) . \qquad \textbf{2.4}$$

Y considerando que:

$$sen(x+t) = sen(x)\cos(t) + \cos(x)sen(t),$$

$$\cos(x+t) = \cos(x)\cos(t) - sen(x)sen(t).$$

Las ecuaciones 2.3 y 2.4 se pueden expresar de la siguiente forma:

$$a_x = \frac{1}{m}\sum_{1}^{N} -f_i \cos\theta_i \ ,$$

$$a_y = \frac{1}{m}\sum_{1}^{N} -f_i sen\theta_i \ .$$

Por otra parte, para obtener la aceleración rotacional se debe considerar que las fuerzas que ejercen los motores son tangentes al marco circular del robot y apuntan hacia la misma dirección rotacional. Entonces, la aceleración rotacional está dada por la siguiente ecuación [ROJ 2004]:

$$a_w = \frac{R}{I}\sum_1^N f_i \ . \qquad \mathbf{2.5}$$

Donde *R* es el radio del robot, f_i es la magnitud de la fuerza del i-ésimo motor, e I es el momento de inercia.

El momento de inercia de un cilindro sólido es $I = \frac{1}{2}mR^2$ mientras que para un aro delgado es $I = mR^2$ [TIP 1995]. Para cualquier distribución de masa estrictamente entre una concentración de masa en el centro y en la periferia (que sería el caso del robot), $I = \alpha mR^2$ con 0< α <1. Entonces, la ecuación 2.5 queda expresada como:

$$a_w = \frac{1}{m}\frac{\sum_1^N f_i}{\alpha R} \ .$$

Esas ecuaciones de aceleración (2.3, 2.4 y 2.5) pueden ser expresadas como el vector de aceleraciones $(a_x, a_y, a_w)^T$ que se obtiene como el producto de una matriz por un vector de fuerzas.

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_\omega \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} -\cos\theta_1 & -\cos\theta_2 & \dots & -\cos\theta_n \\ -sen\theta_1 & -sen\theta_2 & \dots & -sen\theta_n \\ \frac{1}{\alpha R} & \frac{1}{\alpha R} & \dots & \frac{1}{\alpha R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix} . \qquad \mathbf{2.6}$$

Para trabajar con las mismas unidades (metro sobre segundo al cuadrado) para la aceleración lineal y la aceleración angular, en vez de utilizar a_ω se puede utilizar Ra_ω y la ecuación queda:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ Ra_\omega \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -\cos\theta_1 & -\cos\theta_2 & \dots & -\cos\theta_n \\ -sen\theta_1 & -sen\theta_2 & \dots & -sen\theta_n \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & \dots & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Simplificando la escritura de la ecuación 2.6 se tiene:

$$a = \frac{1}{m} M_A f \ .$$

Donde:

a :Vector de aceleraciones del robot.

M_A : Matriz de acoplamiento de aceleración.

f : Vector de fuerzas de los motores.

La ecuación 2.6 permite encontrar las componentes de aceleración de los ejes del marco de referencia (aceleraciones del robot) y la aceleración rotacional dada una configuración[5] de motores y la fuerza que cada motor ejerce.

Por otra parte, para las rutinas de control de IA es útil encontrar una expresión que relacione la **velocidad del robot** con el vector de **velocidades de los motores**. Esto sucede porque un robot que se encuentra en una posición inicial debe realizar un movimiento, que en el mejor de los casos es, sobre una línea recta para que llegue a una posición deseada. Este movimiento, como muestra la figura 2.8, se representa como un vector de velocidad con una magnitud y una dirección[6].

[5] La configuración se refiere a la posición de los motores.

[6] Ver el anexo A para aclarar las consideraciones de la dirección de este vector.

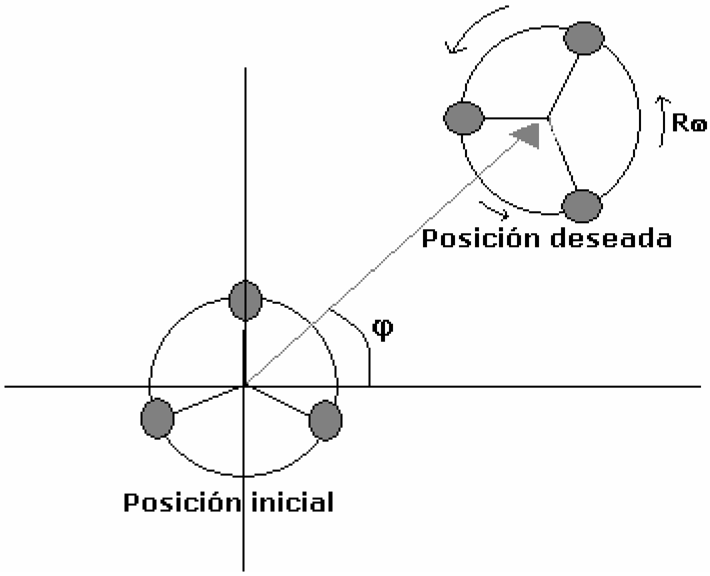

Figura 2.8 – El robot debe ir a una posición futura

Ese vector es la resultante de las **velocidades del robot** (v_x , v_y , ω) por lo que es necesario encontrar una expresión que relacione las velocidades del robot con las velocidades de cada motor para que las rutinas de IA envíen esa información al robot y éste se mueva hacia la posición deseada.

Asumiendo que la relación que se pretende encontrar es análoga a la ecuación 2.6, se puede suponer que tiene la forma $v_m \propto M_v v_e$, donde:

v_M es el vector de velocidades de los motores $(v_1, v_2, ..., v_n)^T$.

M_V es la matriz de acoplamiento de velocidades, de dimensión $Nx3$.

v_R es el vector de velocidades del robot $(v_x, v_x, \omega_v)^T$.

Suponiendo que el vector de velocidades del robot es $(1,0,0)^T$, esto quiere decir que el robot se desplaza en línea recta sobre el eje X a una velocidad de $1\frac{m}{s}$ y las ruedas del robot estarán girando a una velocidad de

$-\cos\theta$[7]. Si el robot se desplazara en línea recta hacia el frente (sobre el eje Y) entonces el vector $v_m = (0,1,0)^T$ y las ruedas tendrían una velocidad de $-sen\theta$. Si el robot únicamente rotara $v_m = (0,0,1)^T$ y cada motor tendría una velocidad de $\frac{1}{N}$[8].

Por lo anterior, la relación se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta_1 & -sen\theta_1 & \frac{1}{n} \\ -\cos\theta_2 & -sen\theta_2 & \frac{1}{n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\cos\theta_n & -sen\theta_n & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix}. \qquad \textbf{2.7}$$

y simplificando la escritura:

$$v_M = M_V v_R .$$

Hasta ahora se han obtenido dos expresiones de gran utilidad para el diseño de un robot F180 y gracias a ellas es posible:

1. Transformar las fuerzas de los motores en aceleraciones del robot:

$$a = \frac{1}{m} M_A f . \qquad \textbf{2.6}$$

2. Transformar velocidades del robot en velocidades de los motores:

$$v_M = M_V v_E . \qquad \textbf{2.7}$$

Considerando que las ecuaciones anteriores utilizan matrices, en las siguientes líneas se analizará si es factible obtener las relaciones inversas.

[7] De acuerdo con lo establecido en el anexo 1.

[8] N es el número de motores del robot.

La forma simplificada de la ecuación 2.6 sugiere que la relación inversa se podría encontrar fácilmente al considerar que el concepto de inversa de una matriz es análogo al del recíproco de un número real. En el sentido de que el producto de un número real con su recíproco es la unidad, así como el producto de una matriz con su inversa es la matriz identidad. Recordando la definición de una matriz inversa:

Sea I_n la matriz identidad de $n \times n$ y A una matriz cuadrada de $n \times n$. Si existe una matriz A^{-1} de $n \times n$ que tenga la propiedad de que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n .$$

Se dice que A^{-1} es la inversa de A [STE 2000].

El problema radica en que la matriz M_A no es cuadrada y por lo tanto no es invertible.

Para resolver problemas de este tipo se recurre al uso de la matriz pseudoinversa, cuya definición es la siguiente:

Si A es una matriz de $m \times n$, se llama pseudoinversa de A a la matriz :

$$A^{+} = (A^{T}A)^{-1}A^{T} \text{ si el rango de } A = n \text{ ó}$$

$$A^{+} = A^{T}(AA^{T})^{-1} \text{ si el rango } A = m .$$

De esta manera se obtienen las matrices pseudoinversas $M_A{}^{+}$, $M_V{}^{+}$ y las expresiones que permiten:

1. Transformar aceleraciones del robot en fuerzas de motores

$$f = mM_A{}^{+}a . \qquad \textbf{2.8}$$

2. Transformar velocidades de los motores en velocidades del robot:

$$v_R = M_A{}^{+}V_M . \qquad \textbf{2.9}$$

Hasta este punto se han encontrado cuatro ecuaciones muy útiles para el diseño de un robot F180.